

OSNOVI TELEKOMUNIKACIJA

Prof.dr Milica Pejanović-Djurišić

Jelena Kovač, MSc

UVOD

- Telekomunikacije (elektronske komunikacije) predstavljaju naučno-stručnu oblast koja se bavi prenosom poruka električnim putem. Električni ekvivalent poruke je električni signal (signal) čijim prenosom od izvora poruke do destinacije se ostvaruje telekomunikacioni prenos.
- Poruke koje treba prenijeti sa jednog mjesta (njihovog izvora) do drugog (mjesta prijema, destinacije) mogu da budu u različitim formama: pisani tekst, govor, muzika, nepokretna i pokretna slika, podaci,...
- Potreba za komuniciranjem među ljudima postoji oduvijek, pri čemu su se koristili razni načini kako bi se ostvarila komunikacija, odnosno prenijele poruke: glasnici, golubovi pismoše, paljenje vatre i dimni signali, heliograf u Grčkoj, sistemi megafonskog prenosa u Egiptu...

Dvadeset četvrti maj 1844. god. može se smatrati danom početka elektronskih komunikacija. Tog dana Morse je ostvario prvi **telegrafski prenos** između Vašingtona i Baltimora. Već 1851. godine 50 preduzeća u SAD eksploatisalo je Morseov patent. Iste godine položen je prvi podmorski telegrafski kabl između Francuske i Engleske, a 1866. god. ostvareno je povezivanje dvije obale Atlantskog okeana podmorskim kablom.



Morseov telegraf

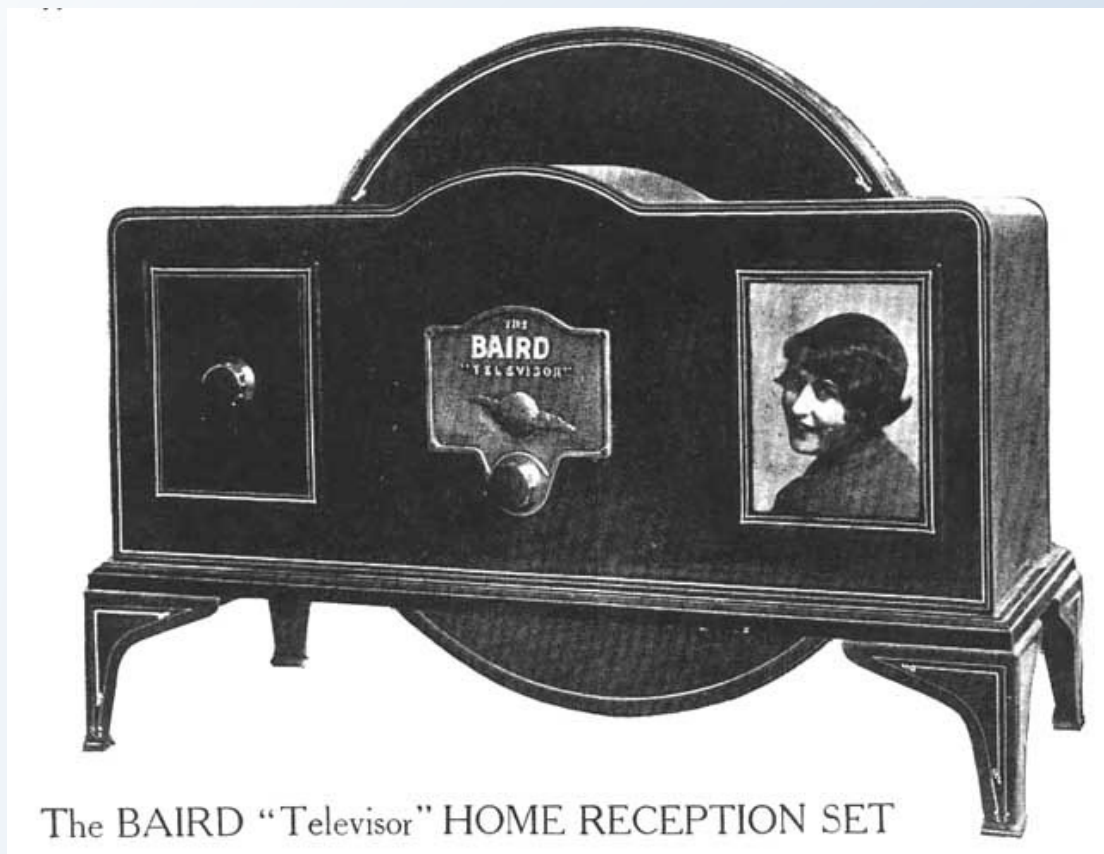
Savršeniji vid prenosa poruka predstavlja **telefonija** čijim se začetnikom smatra Graham Bell (1876. god.). Zvučna energija govora se pretvara u električni signal koji se prenosi do drugog aparata u kome se vrši konverzija električne energije u zvučni signal. Godine 1892. izgrađena je prva automatska telefonska centrala.



Modeli prvih telefona

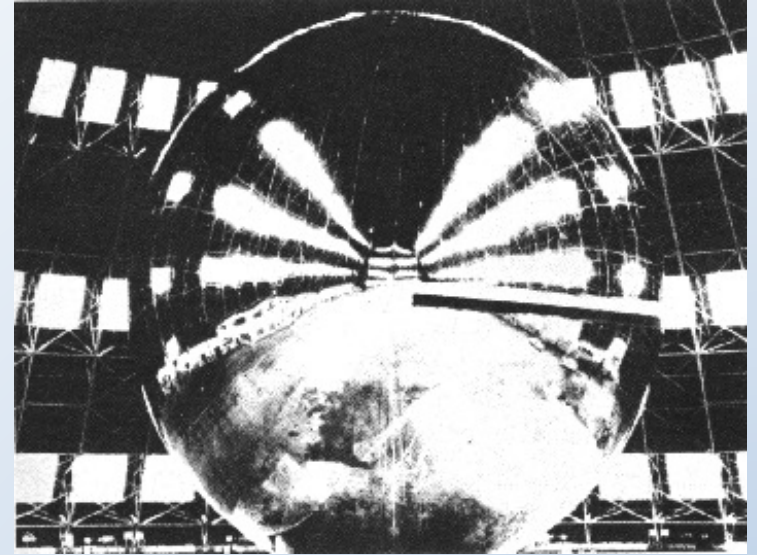
- Neophodnost da se izvor poruke i destinacija povežu fizičkom linijom veze predstavljala je ograničenje u stvaranju globalnog sistema komunikacija. Radovi I. Henryja (1797-1878), J. C. Maxwella (1831-1879) i H. Hertza (1857-1894) sa kraja 19.vijeka predstavljaju naučnu osnovu na kojoj su razvijene **radio-komunikacije**. Ruski fizičar A. S. Popov (1859-1906) je 1896. izveo demonstraciju radio-veze šaljući telegram sadržine "Heinrich Hertz" napisan Morseovom azbukom. Ipak, G. Marconi je prvi prijavio patent za **bežičnu telegrafiju** 1897. godine, ostvarivši bežičnu vezu na rastojanju od 1000 metara. Tako su počeli prvi koraci u radio-komunikacijama. 1904. godine je ostvarena prva radio-telegrafska veza na trasi Volujica (Bar)-Italija. Sedmog januara 1927. godine ostvarena je prva radio-veza u javnom telefonskom saobraćaju između Njujorka i Londona. Od tada se radio-komunikacije javljaju u dva vida:
 - 1. komunikacije od tačke do tačke: povezuju se dva odredjena korespondenta.
 - 2. tzv. "masovne komunikacije": sa jednog mjesta poruka se prenosi velikom broju korisnika.

- Daljim razvojem nauke i tehnike javlja se potreba za prenosom poruka ne samo u vidu pisane riječi i govora, već i u obliku slika, pokretnih slika, a kasnije, razvojem računara, i prenos podataka između njih.
- 1927. god. je ostvaren prvi prenos **televizijskog signala** između Njujorka i Vašingtona.



1956. godine postavljen **prvi telefonski podmorski kabl** između SAD i Engleske kojim se moglo prenijeti istovremeno 36 govornih komunikacija.

- U avgustu 1960. bio je lansiran prvi telekomunikacioni, **pasivni satelit** "Echo 1", a oktobra iste godine prvi **aktivni satelit** "Courier IB". 1965. god. ostvaren je prvi eksperimentalni televizijski prenos slike u boji preko satelita, a nešto kasnije iste godine u komercijalne svrhe mogao je da se ostvari prenos 240 telefonskih razgovora ili dva TV programa preko satelita.
- Lansiranjem telekomunikacionih satelita otvara se nova era u oblasti telekomunikacija, posebno kad su u pitanju LEO i GEO sateliti, pa sve do Starlink satelita.



- Druga polovina 20. vijeka donosi intenzivan razvoj ***mobilnih radio komunikacija i optičkih komunikacija***. Prvi pokušaji na tom polju su bili radiofoni (voki-toki), zatim dispečerski sistemi, radio-pejdžing sistemi, mobilni radio-telefonski sistemi koji obezbjeđuju sve što i fiksni telefonski sistemi.



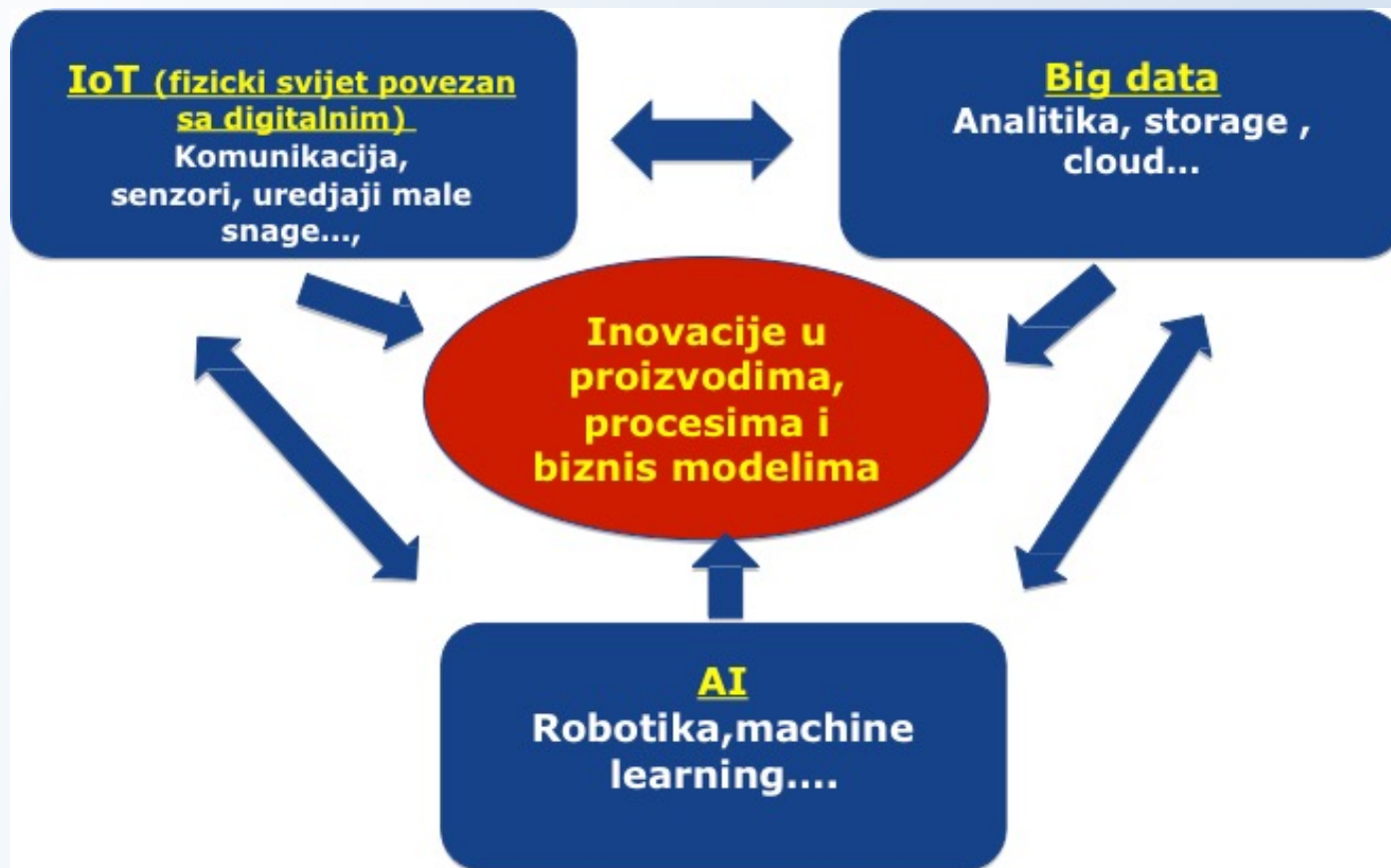
Informaciono-komunikacione tehnologije (ICT) sve intenzivnije transformišu život ljudi širom svijeta, pružajući mnoge mogućnosti u različitim sektorima kao što su zdravstvo, obrazovanje, poljoprivreda, finansije, javno upravljanje....

Networked society je društvo u kojem su svi pojedinci u prilici da koriste društvene mreže, da imaju pristup medijskim i zabavnim sadržajima, da efikasno i produktivno obavljaju svoj posao ili da vode svoje poslovanje, da brzo, lako i pouzdano pristupe javnim servisima.

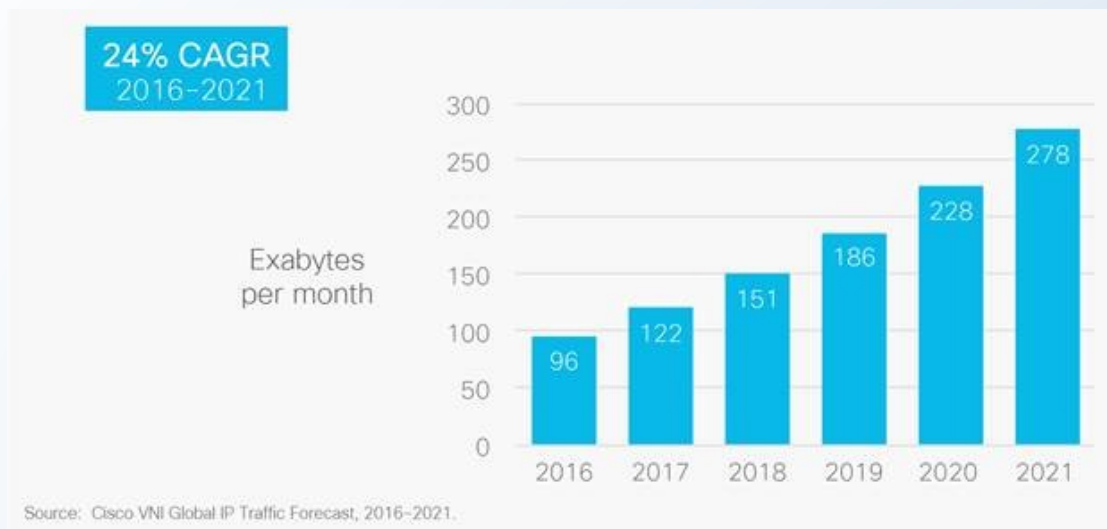
	2010	2015	2016	2017 (E)
Populacija	7,1 milijarda	7,3 milijarde	7,5 milijarde	7,6 milijardi
Mobilni celularni sistemi (br korisnika)	5,3 milijarde	7,2 milijarde	7,5 milijardi	7,7 milijardi
Mobilni širokopojasni sistemi (br korisnika)	2,02 milijarde	3,3 milijarde	3,86 milijarde	4,22 milijarde
Individualni korisnici Interneta	1,99 milijarde	3,15 milijarde	3,39 milijarde	3,58 milijarde
Fiksni širokopojasni sistemi (br korisnika)	526 miliona	842 miliona	917 miliona	979 miliona

Značajna digitalizacija društva započela je krajem XX vijeka i ubrzana je u prvoj deceniji XXI vijeka, podstičući **digitalnu transformaciju** koja se danas prihvata od strane sve većeg broja subjekata i organizacija.

Digitalnu transformaciju karakteriše fuzija naprednih tehnologija i integracija fizičkih i digitalnih sistema, dominantnost inovativnih poslovnih modela i novih procesa i stvaranje pametnih proizvoda i usluga.



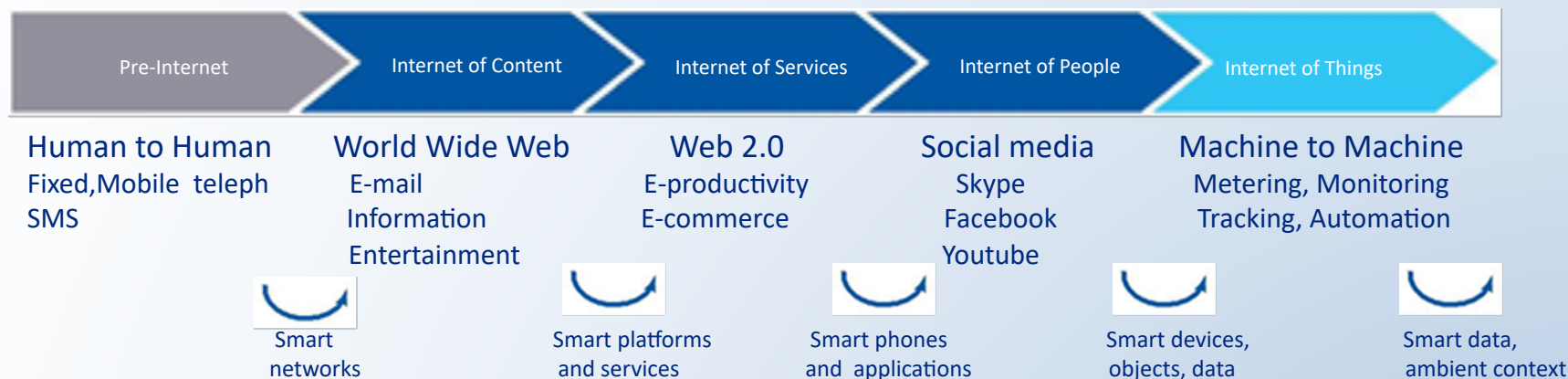
Naredne decenije će karakterisati milijarde pametnih uređaja, triloni eura u privrednom rastu i uštedi troškova, kao i zettabytes podataka generisanih od strane senzora i drugih uređaja.



Milioni povezanih uređaja (sa ograničenim mogućnostima u pogledu računarske snage, memorije i trajanja baterija) su formirali novu vrstu Interneta:
Internet of Things (IoT)

Prema prognozama, do 2025 Internet će se sastojati od preko 30 milijardi povezanih IoT uređaja. Pri tome se IoT definiše kao međusobno povezivanje svakodnevnih objekata u ekosistemu pametnih aplikacija i usluga koje će poboljšati i pojednostaviti život svakog pojedinca na globalnom nivou.

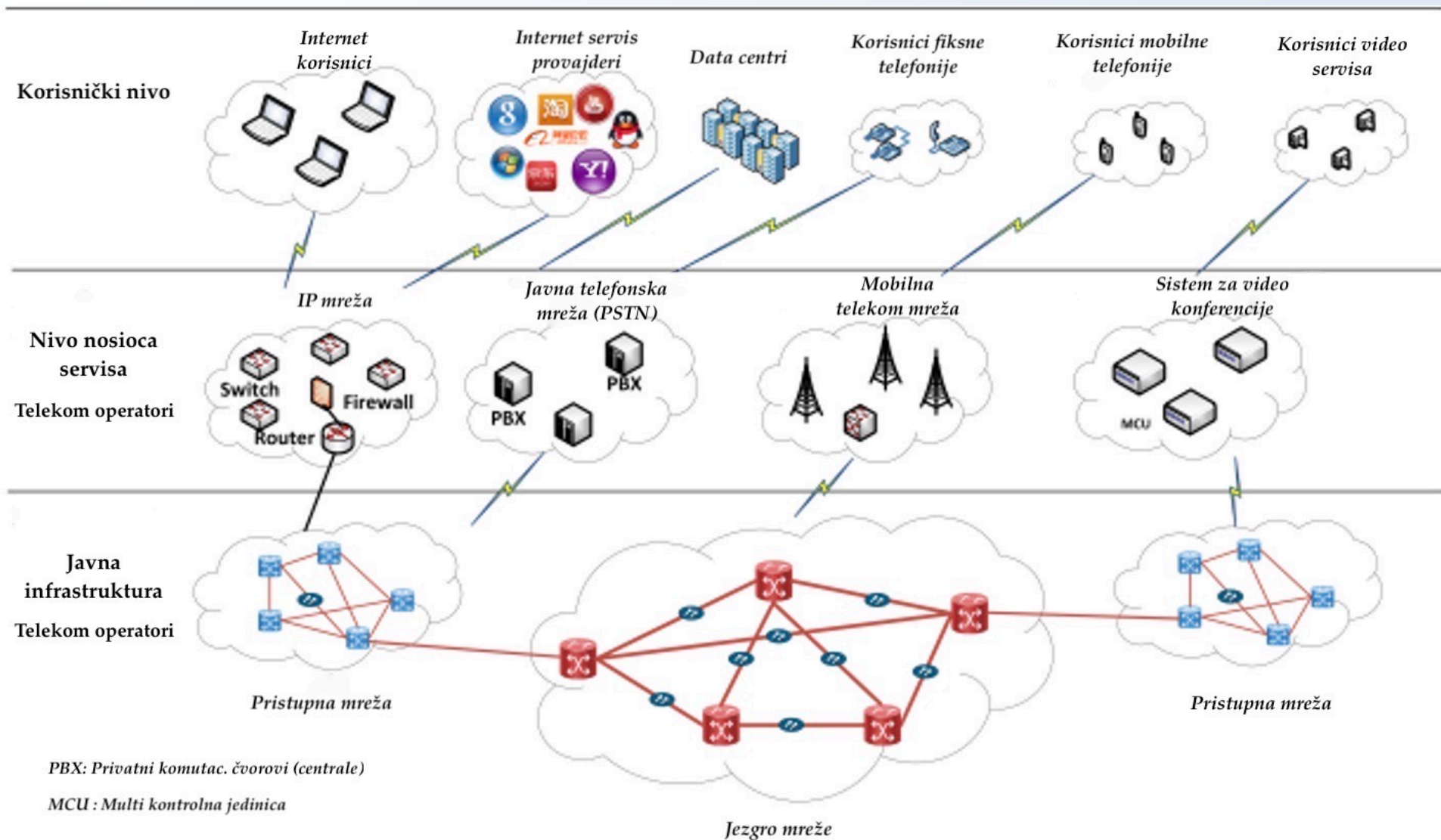
Tokom proteklih decenija, Internet je evoluirao iz statičkog spremišta međusobno povezanih hipertekstualnih dokumenata ka dinamičnom univerzumu umreženih ljudi, mašina i aplikacija.



Trenutno se može govoriti o narednom stepenu evolucije u načinu na koji se koristi Internet.

Evolucije koja je omogućena prije svega konvergencijom sledećih tehnoloških oblasti: Big Data, Internet of Things, blockchain, machine learning i artificial intelligence, i koja će dovesti do suštinskog zaokreta i transformisati postojeće društvene, političke i ekonomske norme, kreirajući prilike i izazove: **za svakog pojedinca, na svakom mjestu i u svakom trenutku.**

Koncept tradicionalnih telekomunikacionih mreža

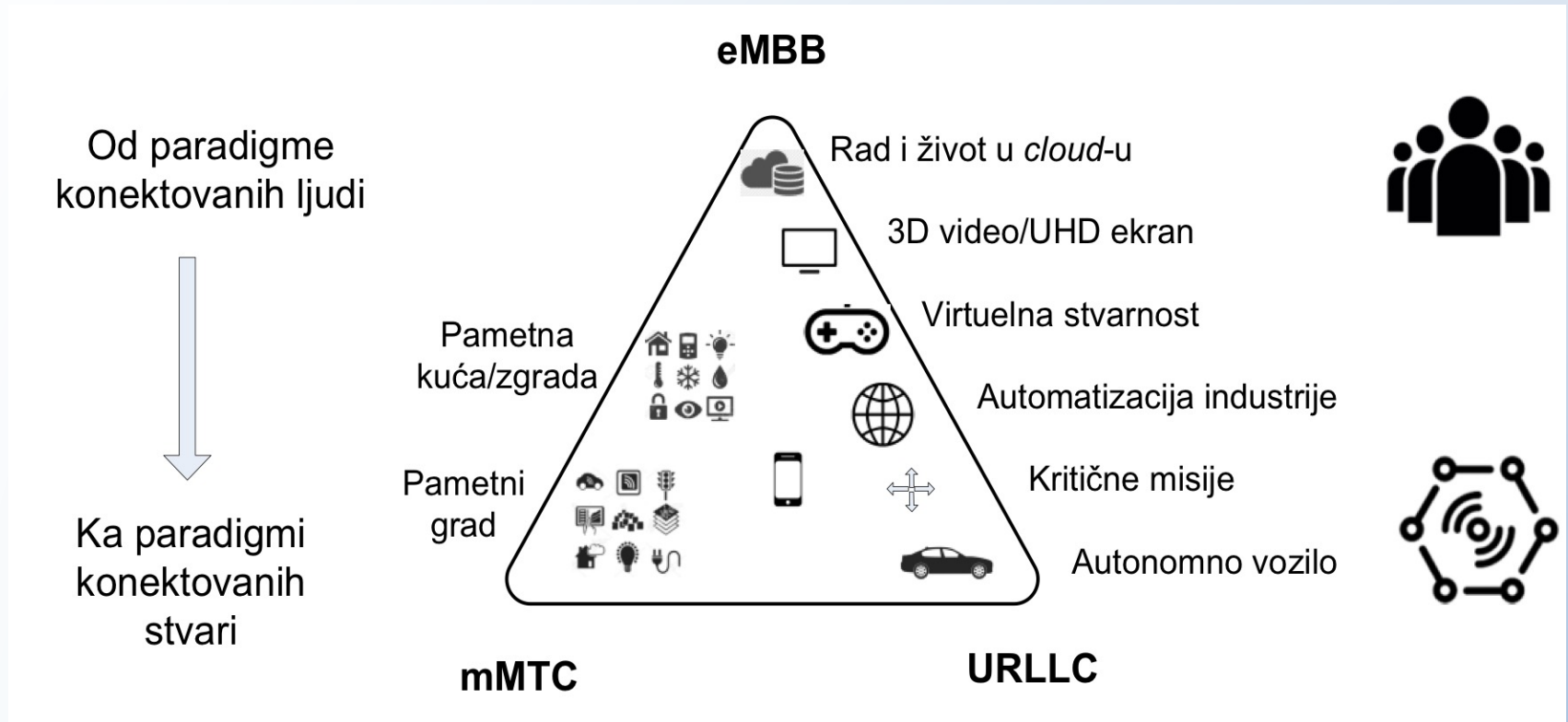


- Javna infrastruktura je generalno osnova telekomunikacionih mreža i obezbeđuje fizičke prenosne puteve za sve vrste telekomunikacionih mreža, kao što su mreže za prenos govora, podataka, slike itd. Obično je grade operatori ili vladine institucije za sve pružaoce telekomunikacionih servisa. Savremena javna infrastruktura je u najvećoj mjeri bazirana na korišćenju optičkih komunikacionih tehnologija velike brzine.
- Nivo nosioca servisa se odnosi na podršku za sve vrste usluga kao što su komunikacija podataka, govorna komunikacija, video komunikacija itd. Odvojene računarske mreže asnovane na zInternet protokolu (IP), tradicionalne telefonske mreže, mobilne mreže i specijalni video konferencijski sistemi su međusobno povezane na potpuno heterogeni način.
- Korisnički nivo se sastoji od individualnih i poslovnih korisnika. Individualni korisnici su su krajnji korisnici određenog servisa, tipa interneta, telefona, mobilnih telefona ili video uređaja. Poslovni korisnici su poslovni subjekti i npr. provajderi Internet sadržaja. Svi su povezani na mreže koje su izgradili telekom operatori.

Osnovni problem povezan sa tradicionalnom arhitekturom se odnosi na ograničenja evolucije komunikacione infrastrukture čime se dovodi u pitanje mogućnost uvođenja novih smart servisa, kao i postizanja potrebno kapaciteta povezivanja.

Aktuelni telekomunikacioni ambijent

Moderni telekomunikacioni sistemi se razvijaju na principima pune konvergencije fiksnih i bežičnih mreža, uz punu implementaciju Internet infrastrukture koja je omogućila prelaz sa H2H (Human to Human) paradigme konektovanih ljudi na M2M (Machine To Machine) paradigmu konektovanih stvari i objekata.



(*eMBB*-napredni mobilni širokopolasni sistemi; *mMTC*-sistemi za masovnu komunikaciju izmedju uređaja (mašina); *URLLC*-sistemi sa ultra malim kašnjenjem)

Savremene komunikacije:

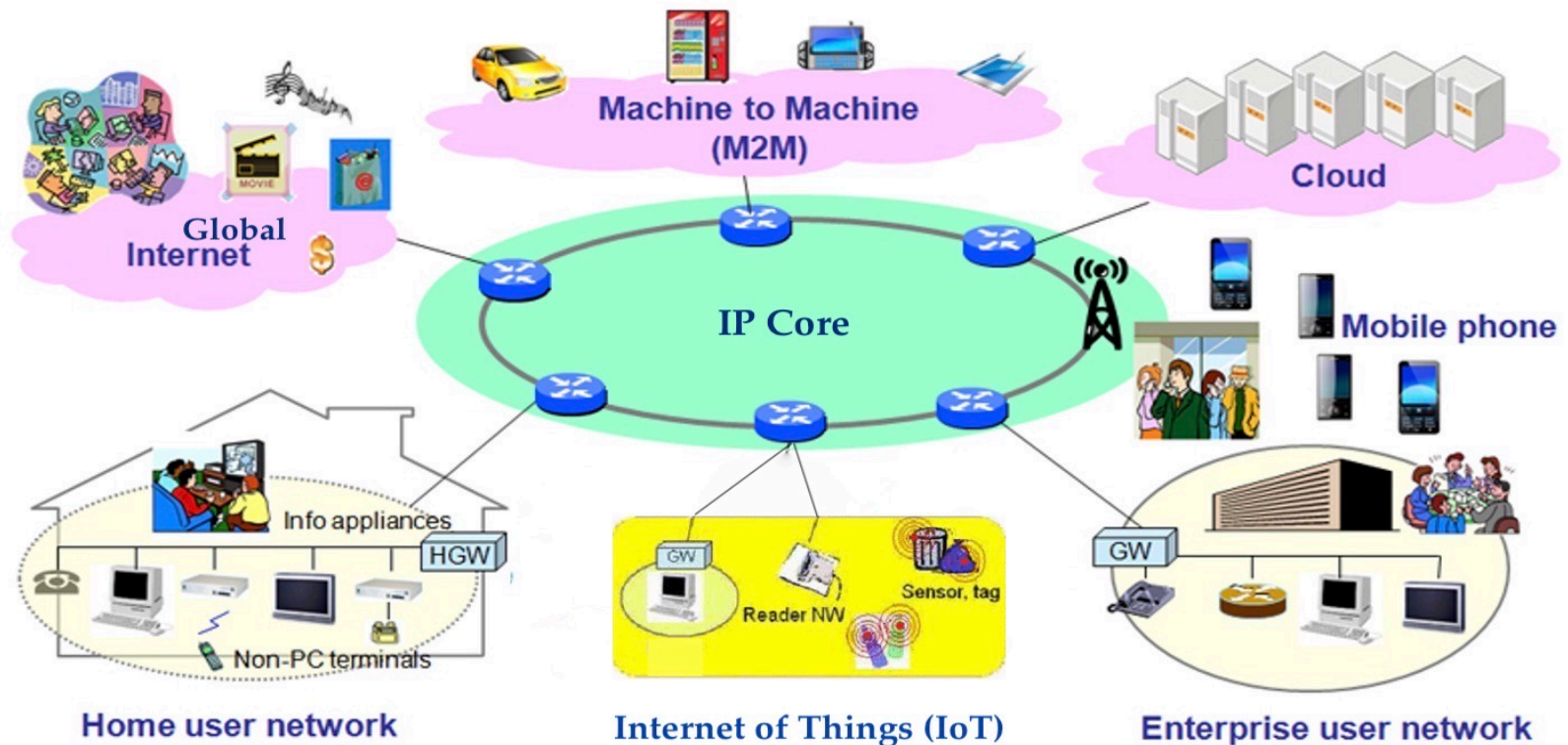
-Fiksne

-Bežične: globalno mobilne; ograničeno mobilne

Osnovni trend savremenih telekomunikacija je **konvergencija**, koja podrazumijeva ostvarivanje komunikacije bilo gdje, bilo kad i sa bilo kim, nezavisno od vrste korisničkog terminala.

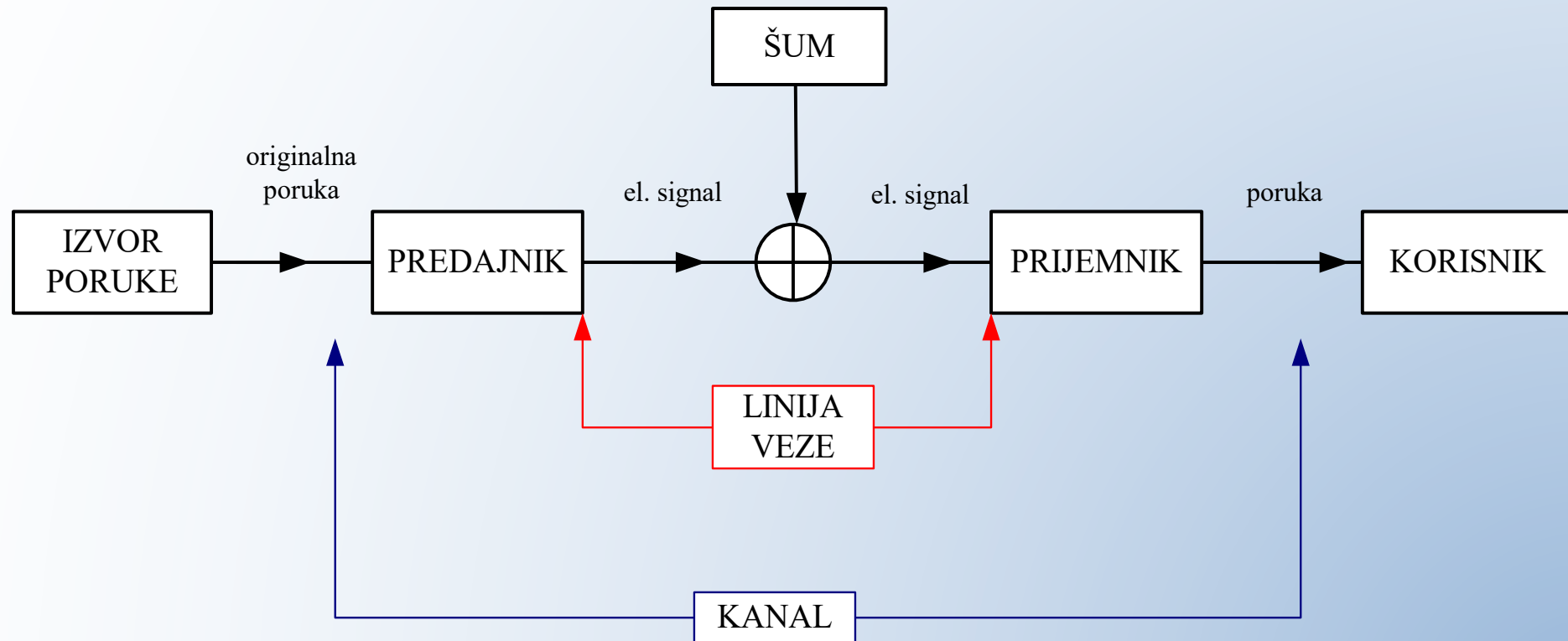
Fixed Mobile Convergence (FMC)

Future Network Architecture



MODEL KOMUNIKACIONOG SISTEMA (MREŽE)

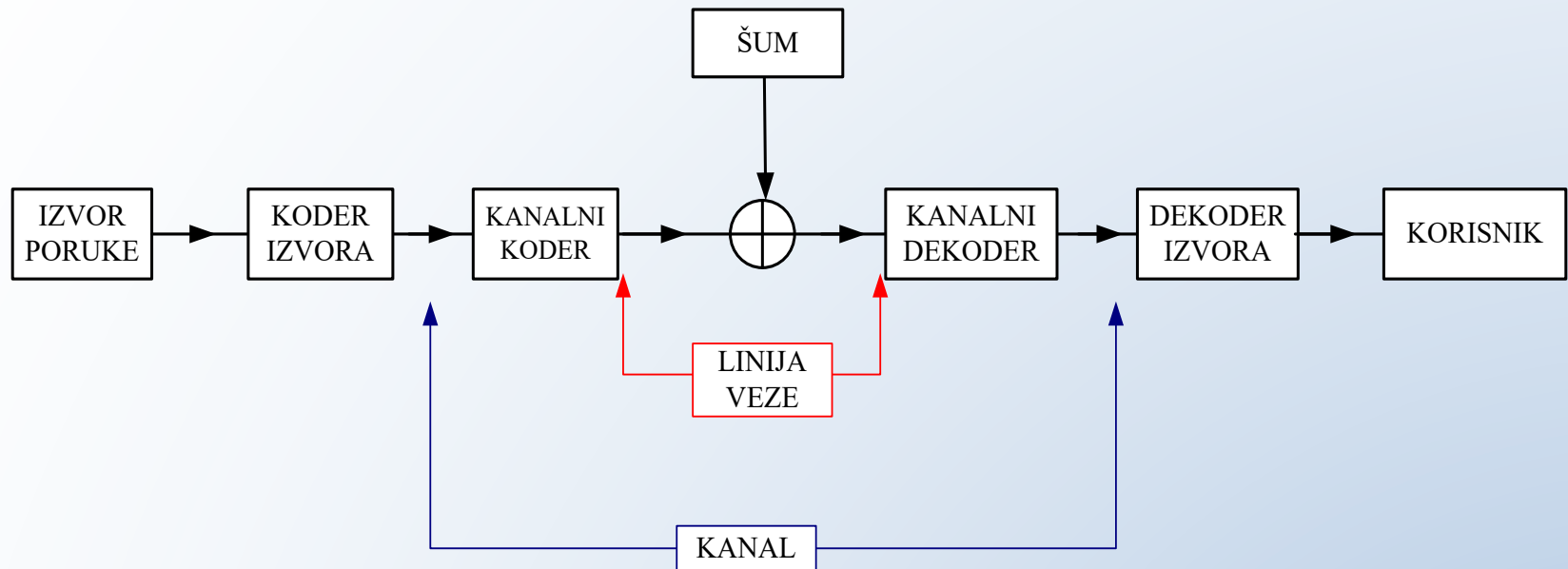
Svaka telekomunikaciona mreža (sistem) može generalno da se predstavi različitim modelima. Jedan od uobičajenih modela za predstavljanje telekomunikacionih sistema je **Shannon**-ov model.



Elementi Shannon-ovog modela:

- 1. Izvor poruke** - bilo kakav objekat, operator, ... koji generiše poruke (zvuk, slika, podaci) koje treba prenijeti korisniku
- 2. Predajnik** - dio telekomunikacionog sistema u kome se vrši konverzija poruke u njen električni ekvivalent koji se naziva električni signal
- 3. Linija veze** (prenosni put, transmisioni medijum) - sredina kroz koju se signal prenosi od predajnika do prijemnika
- 4. Šum** - smetnje slučajnog karaktera koje se mogu superponirati sa signalom duž linije veze, i na taj način uticati na oblik signala koji dolazi do prijemnika
- 5. Prijemnik** - uređaj koji obavlja operaciju inverznu predajniku: transformiše primljeni signal u poruku
- 6. Korisnik** - osoba, mašina ili objekat kome je poruka namijenjena

Nakon Shannon-a, koji je dao opšti model telekomunikacionih sistema, predloženi su i drugi, nešto detaljniji modeli:



- 1.Koder izvora** – sastavni dio predajnika koji treba da pretvori poruku u odgovarajući kod (niz simbola iz konačnog skupa različitih simbola)
- 2.Kanalni koder** – pretvara koderom izvora kodirnu poruku u signal
- 3.Kanalni dekoder** – primljeni signal pretvara u kodiranu poruku
- 4.Dekoder izvora** – poruku predstavljenu odgovarajućim kodom prevodi u odgovarajući oblik pogodan za korisnika

PRIRODA PORUKA I KARAKTERISTIKE PRENOŠENIH SIGNALA

Osnovni zadatak telekomunikacionog sistema je da se poruka u vidu signala prenese na udaljeno mjesto, a da pri tome primljeni signal što je moguće više odgovara poslatom signalu. Stoga je neophodno detaljno proučiti i analizirati sve osobine signala kojima se prenose poruke između korisnika.

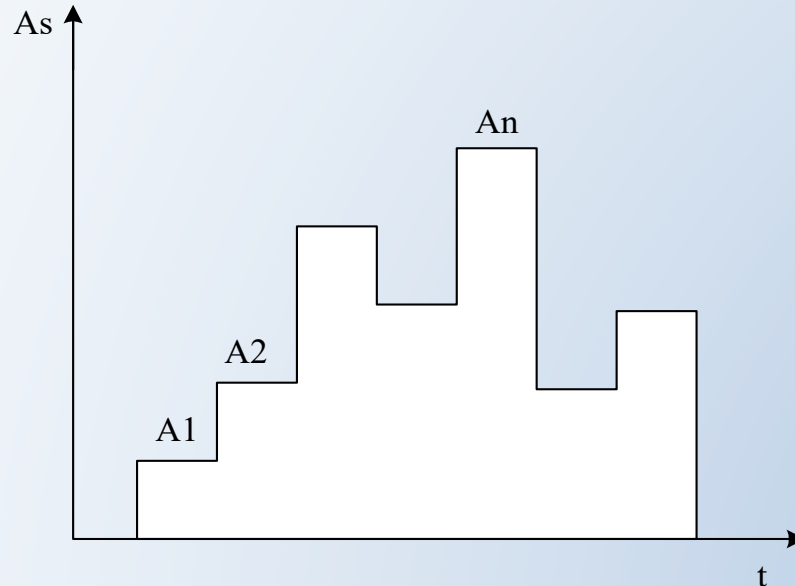
■ PRIRODA PORUKA

Sve poruke koje šalje neki izvor poruka možemo svrstati u dvije grupe:

1. Diskretne poruke
2. Kontinualne poruke

Diskretne poruke

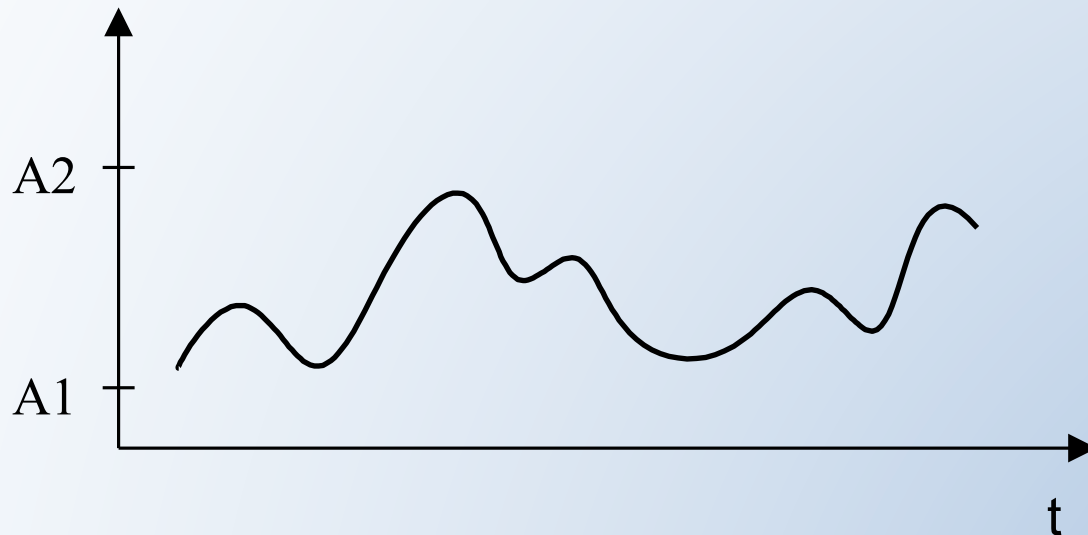
Poruke koje se pojavljuju kao nizovi odvojenih elemenata koji imaju konačan broj različitih vrijednosti. Ti elementi nazivaju se *simbolima* i pripadaju jednom konačnom skupu zvanom *alfabet*. Primjer ovakvih poruka su poruke koje se prenose u telegrafiji i računarskim komunikacijama.



Signal koji odgovara diskretnoj poruci

Kontinualne poruke

Opisuju se vremenskim funkcijama koje mogu imati sve moguće vrijednosti, koje se nalaze izmedju odredjenih granica. Takve su npr. poruke koje se prenose u telefonskim sistemima ranijih generacija (analogni).



Signal koji odgovara kontinualnoj poruci

Tipovi signala

U zavisnosti od vrste poruka koju predstavljaju, može se govoriti o dva tipa signala:

- ANALOGNI SIGNALI
- DIGITALNI SIGNALI

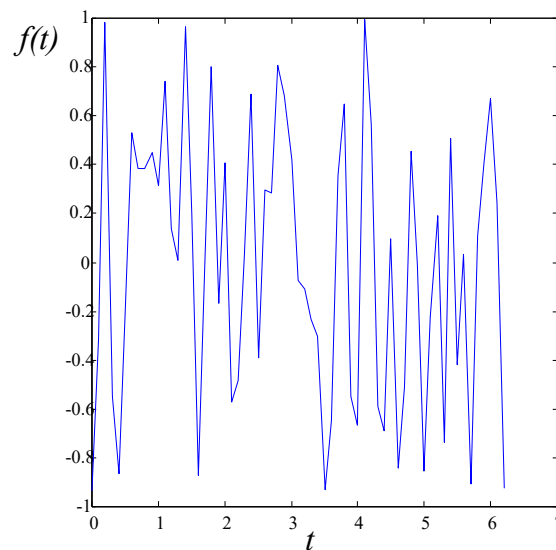
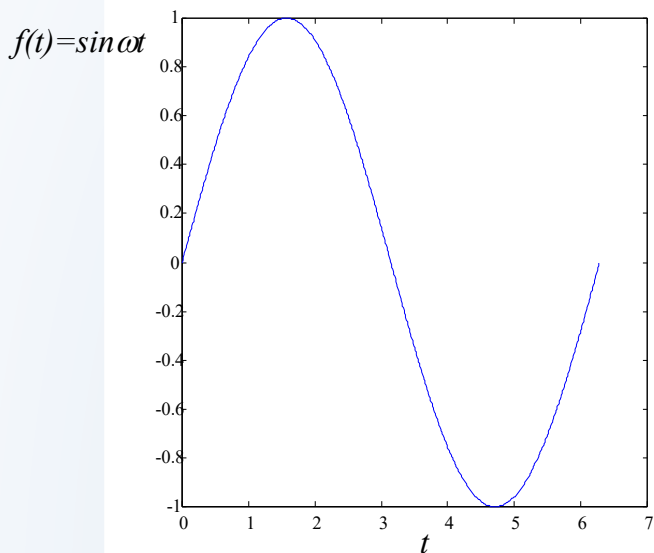
Saglasno tome, i telekomunikacioni sistemi se klasifikuju u dvije grupe:

- ANALOGNI TELEKOMUNIKACIONI SISTEMI
- DIGITALNI TELEKOMUNIKACIONI SISTEMI

PRIRODA SIGNALA

Generalno se može govoriti o dvije grupe signala koji se pojavljuju u komunikacionim sistemima:

- determinističkim, čije su vrijednosti u vremenu opisane preciznim analitičkim izrazom;
- slučajnim, za koje nije moguće definisati odgovarajući analitički izraz kojim bi se unaprijed opisao njihov vremenski tok.



ANALIZA DETERMINISTIČKIH SIGNALA

Deterministički signali se mogu podijeliti u dvije grupe:

1. Periodični

2. Aperiodični

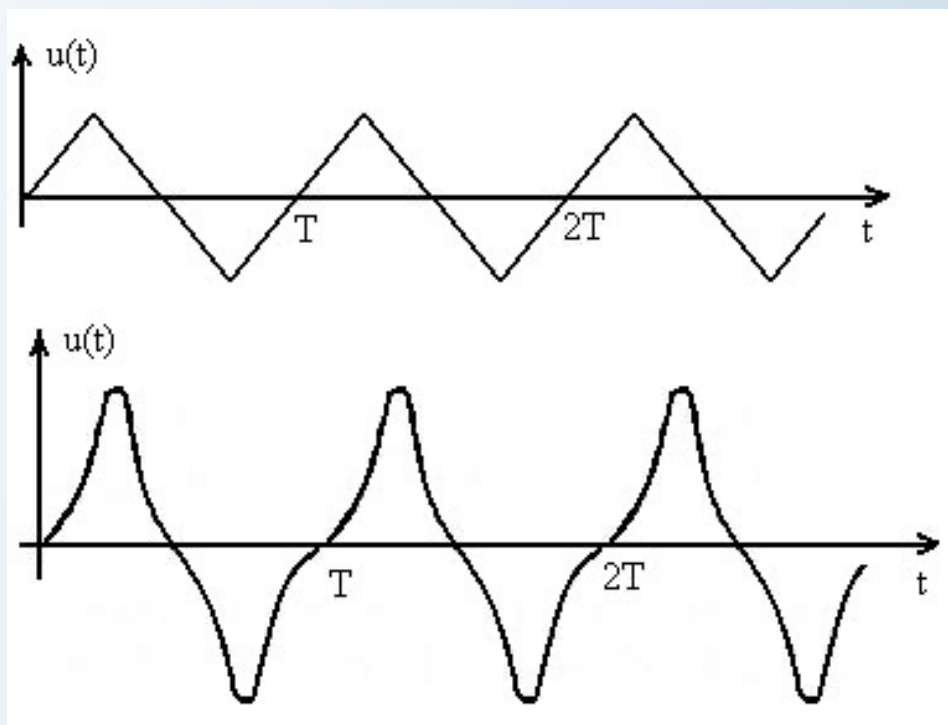
U ispitivanju osobina determinističkih signala koristi se harmonijska analiza. Harmonijska analiza ima za cilj da prikaže signal u domenu učestanosti, a zasniva se na teoriji Fourierovih redova i Fourierove transformacije. Za periodične signale se primjenjuje analiza pomoću ***Fourierovih redova***, a za aperiodične ***Fourierova transformacija***.

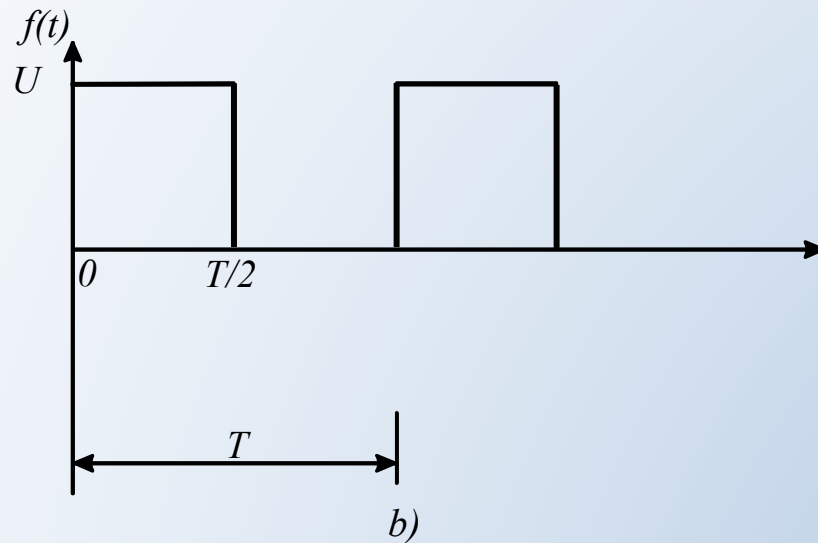
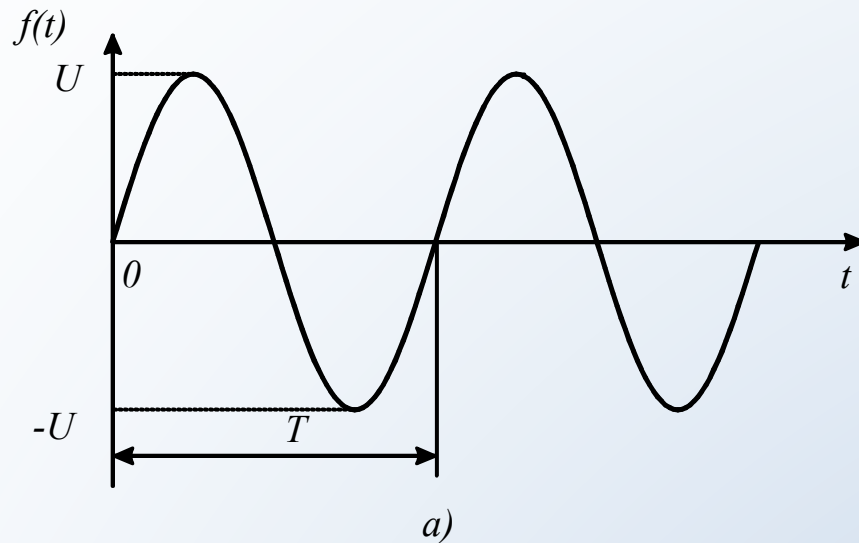
HARMONIJSKA ANALIZA PERIODIČNIH SIGNALA

Periodičan je svaki signal koji zadovoljava uslov:

$$f(t) = f(t+T)$$

gdje je T perioda signala $f(t)$.





Primjeri periodičnih signala: a) sinusni signal; b) povorka pravougaonih impulsa

Da bi se periodična funkcija razvila u Fourier-ov red mora biti zadovoljen Dirichlet-ov uslov:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt < \infty$$

Fourierov red tada može imati jedan od sledećih oblika:

1.
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t),$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$T=2\pi/\omega_0$ je perioda, $\omega_0=2\pi f_0$ osnovna kružna učestanost, a_n i b_n Fourierovi koeficijenti.

2.
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n),$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \theta_n = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

3.
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t},$$

Kako je:

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}, \quad \sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

To je:

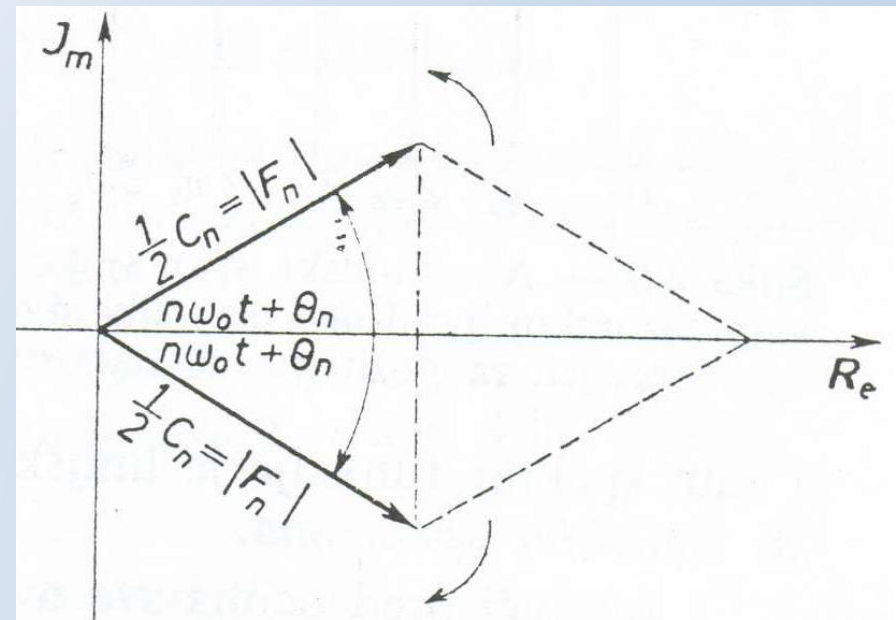
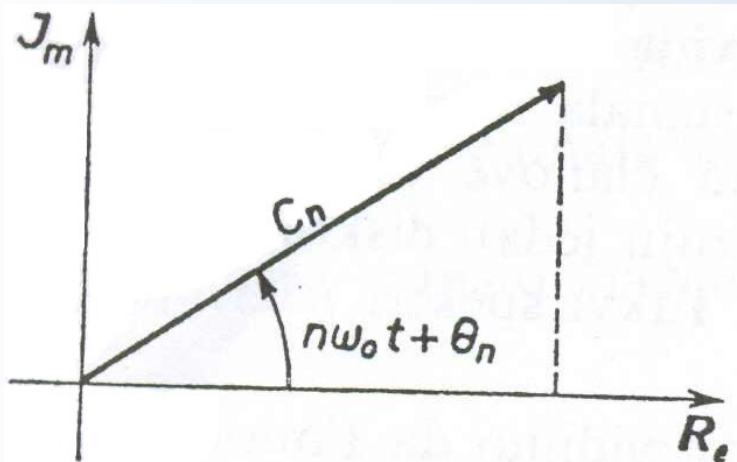
$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = |F_n| e^{j\theta_n} \quad F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Veza izmedju amplituda harmonika C_n i modula kompleksne veličine F_n data je izrazom:

$$|F_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} C_n$$

Fourierova transformacija F_n naziva se još i **kompleksnim spektrom** funkcije $f(t)$. Moduo F_n se naziva **amplitudski**, a njen argument θ_n **fazni spektar** funkcije $f(t)$.

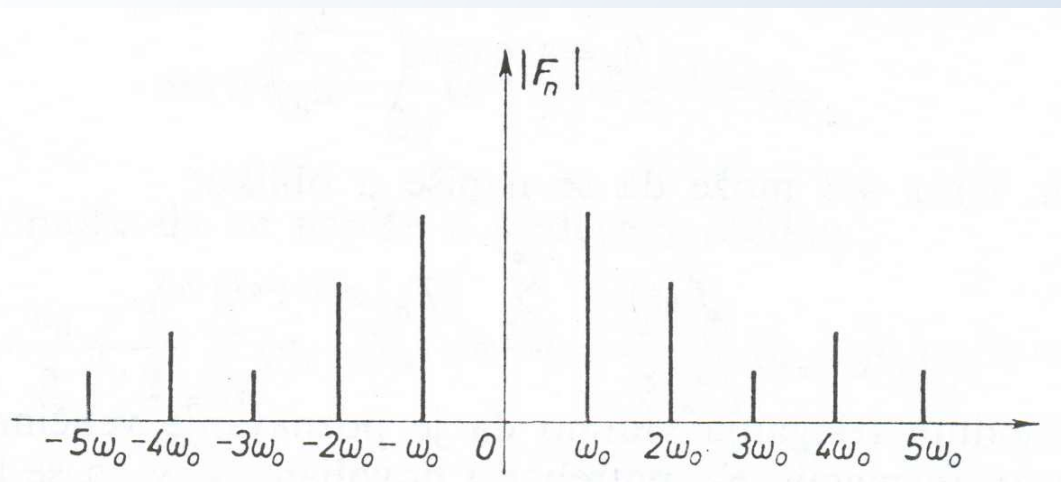
- Fazorska predstava:



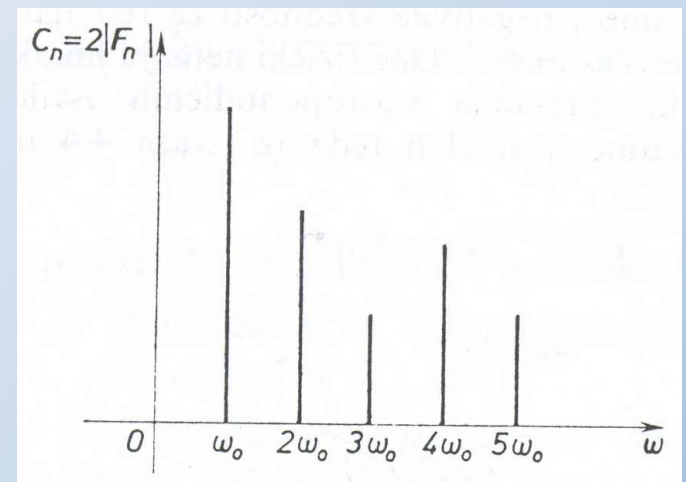
Uobičajeno je da se vrši grafičko prikazivanje signala u domenu frekvencija, i to posebno amplitudskog i faznog spektra. Postoje dva načina:

1. i za pozitivne i negativne učestanosti
2. samo za pozitivne učestanosti, s tim što je amplituda odgovarajućeg harmonika 2 puta veća.

Kompleksni spektri periodičnih signala su diskretni, pa se nazivaju **diskretnim** ili **linijskim** spektrima.



Dvostrani amplitudski spektar

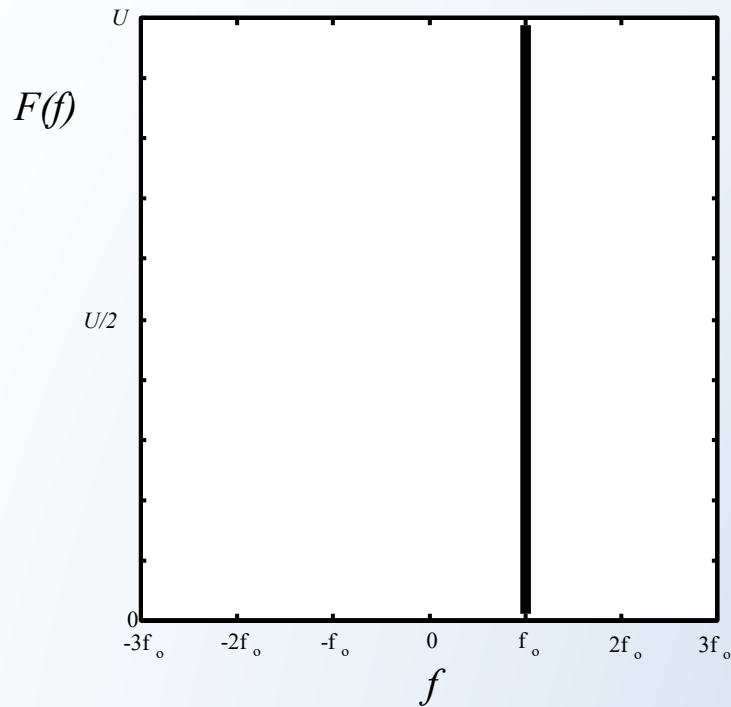


Jednostrani amplitudski spektar

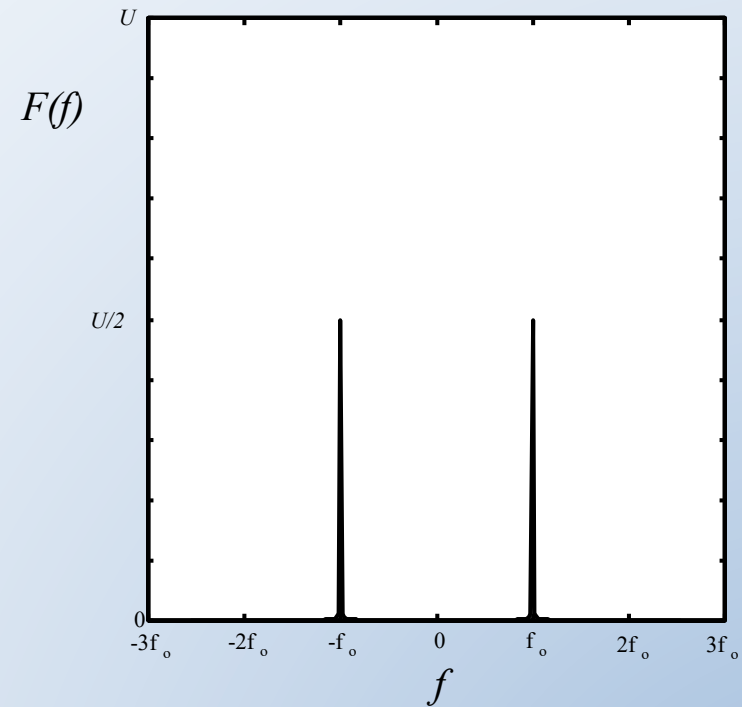
$f(t)$ - opisuje signal u domenu vremena
 F_n - opisuje signal u domenu učestanosti

$$f(t) \longleftrightarrow F_n$$

Fourierov transformacioni par



*Jednostrani amplitudski spektar
prostoperiodičnog signala*



*Dvostrani amplitudski spektar
prostoperiodičnog signala*

Bitna karakteristična veličina periodičnog signala $f(t)$ je njegova **efektivna vrijednost**:

$$[\text{Ef.vrijednost } f(t)] = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt}$$

$$[\text{Ef.vrijednost } f(t)]^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \right) dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

$$[\text{Ef.vrijednost } f(t)]^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

Posljednja relacija je poznata kao **Parsevalova teorema** za periodične signale:

- Kvadrat efektivne vrijednosti brojno je jednak snazi koju taj signal razvija na otporniku od jednog oma.
- Ukupna srednja snaga složenog signala jednaka je sumi snaga svih njegovih harmonika.

KORELACIJA PERIODIČNIH SIGNALA

U opštoj harmonijskoj analizi periodičnih signala poseban značaj ima pojam **korelacije** koja povezuje dva periodična signala.

Neka su signali opisani funkcijama $f_1(t)$ i $f_2(t)$ koje imaju istu periodu $T=2\pi/\omega_0$.

Fourrierove transformacije ovih funkcija su:

$$F_{n1} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$F_{n2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_2(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Njihova korelacija se definiše na sledeći način:

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) f_2(t + \tau) dt, \quad -\infty < \tau < \infty$$

τ predstavlja kontinualni pomjeraj u vremenu u intervalu od $-\infty$ do ∞ , pri čemu τ ne zavisi od t .

Traženje korelacije dva signala podrazumijeva tri koraka:

1. Pomjeranje jedne od funkcija u vremenu za τ
2. Množenje te pomjerene funkcije drugom funkcijom iste periode
3. Izračunavanje srednje vrijednosti tog proizvoda u toku jedne periode

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) f_2(t + \tau) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n2} e^{jn\omega_0(t+\tau)} \right) dt =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n2} e^{jn\omega_0\tau} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n1}^* F_{n2} e^{jn\omega_0\tau}$$

Funkcija $R_{12}(\tau)$ je periodična funkcija po τ , sa periodom $T=2\pi/\omega_0$ i njen kompleksni spektar je proizvod $F_{n1}^* F_{n2}$. Stoga važi:

$$F_{n1}^* F_{n2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{12}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

$R_{12}(\tau)$ i $F_{n1}^* F_{n2}$ obrazuju Fourierov transformacioni par. Ovaj stav se naziva **teoremom o korelaciji** periodičnih funkcija. Uvedena funkcija $R_{12}(\tau)$ se naziva **korelaciona funkcija (unakrsna korelacija)**.

Posmatrajmo specijalan slučaj korelacije dva identična signala $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$.

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)f(t+\tau)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* F_n e^{jn\omega_0\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 e^{jn\omega_0\tau}$$

Ovako definisana korelaciona funkcija se naziva **autokorelaciona funkcija**.

Njena vrijednost za $\tau=0$ je:

$$R_{11}(0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

Ovo je analitički izraz za Parsevalovu teoremu.

Kako je $|F_n|^2$ snaga n -tog harmonika na jediničnom otporniku, veličina

$$S_{11}(n\omega_0) = |F_n|^2$$

se naziva **spektar snage** signala $f(t)$.

Shodno navedenim izrazima, dobija se:

$$R_{11}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{11}(n\omega_0) e^{jn\omega_0\tau}$$

Odnosno:

$$S_{11}(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{11}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

Autokorelaciona funkcija $R_{11}(\tau)$ i spektar snage $S_{11}(n\omega_0)$ funkcije $f(t)$ čine Fourierov transformacioni par.

Ovaj stav se naziva **teorema o autokorelaciji periodičnih funkcija**.

Neke osobine autokorelacione funkcije $R_{11}(\tau)$:

- Iz izraza za spektar snage $S_{11}(n\omega_0)$ vidimo da on ne zavisi od početnog faznog stava pojedinih harmonika. Pošto je $S_{11}(n\omega_0)$ istovremeno i kompleksni spektar autokorelacione funkcije $R_{11}(\tau)$, to znači da ***sve periodične funkcije koje imaju iste amplitude harmonika, a međusobno se razlikuju po početnim faznim stavovima, imaju istu autokorelacionu funkciju.***

- $R_{11}(\tau)$ je ***periodična funkcija*** čija je perioda jednaka periodi funkcije $f(t)$, tj. $T=2\pi/\omega_0$.

- $R_{11}(\tau)$ je ***parna funkcija***, što se lako dokazuje:

$$R_{11}(-\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)f(t-\tau)dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}-\tau} f(x)f(x+\tau)dx = R_{11}(\tau)$$

Funkcija $R_{12}(\tau)$ nazvana je korelacionom funkcijom, a nekada se, da bi se istaklo da je riječ o dvije periodične funkcije istih perioda, za razliku od autokorelacione funkcije, ona naziva i **unakrsnom (kroskorelacionom)** funkcijom. Njen kompleksni spektar:

$$S_{12}(n\omega_0) = F_{n1}^* F_{n2}$$

se naziva spektrom **unakrsne snage**.

Neke osobine kroskorelacione funkcije $R_{12}(\tau)$:

- Za kroskorelacionu funkciju bitan je redosled indeksa, tj. važi:

$$R_{12}(-\tau) = R_{21}(\tau)$$

kao i:

$$S_{21}(n\omega_0) = F_{n2}^* F_{n1} = S_{12}^*(n\omega_0)$$

- U opštem slučaju $S_{12}(n\omega_0)$ je kompleksna veličina za razliku od $S_{11}(n\omega_0)$ koja je uvijek realna veličina.

KONVOLUCIJA PERIODIČNIH SIGNALA

Ako imamo dva periodična signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$ iste periode $T=2\pi/\omega_0$, tada se integral:

$$\rho_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) f_2(\tau - t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n1} F_{n2} e^{jn\omega_0\tau}$$

zove **konvolucija** signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$. Lako se pokazuje da važi:

$$F_{n1} F_{n2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \rho_{12}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

Teorema o konvoluciji periodičnih funkcija:

Konvolucija $\rho_{12}(\tau)$ funkcija $f_1(t)$ i $f_2(t)$ i proizvod njihovih kompleksnih spektara $F_{n1} F_{n2}$ obrazuju Fourierov transformacioni par.

Slično korelaciji i kod konvolucije imamo tri operacije:

1. Pomjeranje funkcije $f_2(t)$ u vremenu za τ i njeno preslikavanje simetrično u odnosu na ordinatnu osu
2. Množenje tako dobijene funkcije sa periodičnom funkcijom $f_1(t)$
3. Izračunavanje srednje vrijednosti tog proizvoda u toku jedne periode

Osobine konvolucije:

- Konvolucija periodičnih funkcija je periodična funkcija čija je perioda jednaka periodi signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$, a njen kompleksni spektar je jednak proizvodu $F_{n1}F_{n2}$.

- Važi relacija:

$$\rho_{12}(\tau) = \rho_{21}(\tau)$$